تاریخچهٔ جبر کلاسیک (۱)

ایسرائل کلاینر
مترجمان: روح‌الله جهانی‌پور (استاد دانشگاه کاشان)
سعید مقصودی (استاد دانشگاه زنجان)

کلیدواژه‌ها: معادلات چندجمله‌ای، حل با رادیکال‌ها، جبر نمادین، قضیهٔ اساسی جبر

۱. سرچشمه‌های اولیه

تا اوایل قرن نوزدهم، یعنی حدود سه‌هزار سال، «جبر» عبارت بود از فن حل کردن معادله‌های چندجمله‌ای عمدتاً با درجهٔ حداکثر چهار. موضوع‌هایی از قبیل نمادگذاری این‌گونه معادلات، نوع ریشه‌های آن‌ها و قوانین حاکم بر دستگاه‌های عددی گوناگونی که ریشه‌ها عضو آن‌ها بودند، در این چارچوب مورد بررسی قرار می‌گرفتند. همهٔ این موضوع‌ها را روی هم با عنوان «جبر کلاسیک» می‌شناختند (اصطلاح «جبر» بعداً در قرن نهم میلادی وضع شد). در دهه‌های آغازین قرن بیستم بود که جبر به شکل مطالعهٔ دستگاه‌های اصل موضوعی تکامل یافت و طولی نکشید که این رهیافت اصل موضوعی، «جبر جدید» یا «جبر مجرد» نام گرفت. گذر از جبر کلاسیک به جبر جدید در قرن نوزدهم رخ داد.

بیشتر تمدن‌های بزرگ باستانی، مانند بابلی‌ها، مصری‌ها، چینی‌ها و هندی‌ها، با حل معادله‌های چندجمله‌ای و عمدتاً خطی و درجه دو سروکار داشتند. به‌ویژه بابلی‌ها (حدود ۱۷۰۰ ق. م.) «جبردان‌های» ماهری بودند. آن‌ها می‌توانستند معادله‌های درجهٔ دو و معادله‌هایی را که به آن‌ها منجر می‌شدند، همچون معادله‌های $x + y = a$ و $x^{۲} + y^{۲} = b$، را با روش‌هایی شبیه به روش‌های امروزی حل کنند. این دسته از معادله‌ها به شکل «مسائل کلامی» مطرح می‌شدند.

در اینجا یک نمونه را همراه با حل آن می‌آوریم: «مساحت و دوسوم ضلع مربع را به هم افزوده‌ام؛ حاصل آن ۰;۳۵ شده است. [۳۵/۶۰ در نمایش شصتگانی]. طول ضلع مربع من چیست؟»

با نمادگذاری امروزی، مسئله عبارت می‌شود از حل معادلهٔ $x^{۲} + (۲/۳)x = ۳۵/۶۰$. راه‌حلی که بابلی‌ها عرضه می‌کنند این است:

«عدد ۱، همان ضریب، را در نظر بگیر. دو سوم ۱ برابر با ۰;۴۰ است. نصف آن، ۰;۲۰ را در ۰;۲۰ ضرب کن [نتیجه] برابر با ۰;۶,۴۰ است. آن را به ۰;۳۵ بیفزا، پس [نتیجه] می‌شود: ۰;۴۱,۴۰ که ریشهٔ دوم آن ۰;۵۰ است. مقدار ۰;۲۰ را که در خودش ضرب کردی از ۰;۵۰ کم کن؛ پس [ضلع] مربع می‌شود ۰;۳۰».

دستورالعمل یافتن جواب را می‌توان با نمادگذاری کنونی به این صورت بیان کرد که

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left[\left(۰;۴۰\right)/۲\right]^{۲} + ۰;۳۵} - \left(۰;۴۰\right)/۲ \\ &= \sqrt{۰;۶,۴ + ۰;۳۵} - ۰;۲۰ = \sqrt{۰;۴۱,۴۰} - ۰;۲۰ \\ &= ۰;۵۰ - ۰;۲۰ = ۰;۳۰ . \end{aligned}$$

این دستورالعمل، با فرمول $x = \sqrt{(a/۲)^{۲} + b} - a/۲$ برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{۲} + ax = b$ یکی است که این مورد یک شاهکار محسوب می‌شود. (منابع شمارهٔ ۱ و ۸ را ببینید.)

دربارهٔ جبر بابلی‌ها ذکر این نکات لازم است:

- هیچ‌گونه نمادگذاری جبری در آن وجود نداشت و همهٔ مسئله‌ها و راه‌حل‌ها به‌صورت کلامی بیان می‌شدند؛

● مسئله‌ها به معادله‌هایی با ضرایب عددی می‌انجامیدند؛ به‌ویژه چیزی به‌نام معادلهٔ درجه دوم کلی $ax^{2}+bx+c=0$ که a، b و c پارامترهای دلخواه باشند، وجود نداشت؛

● راه‌حل‌ها دستوری بودند، به این معنی که اگر چنین و چنان کنید، به جواب خواهید رسید و لذا هیچ توجیهی برای این شگردها در کار نبود. با این حال، وجود انبوهی از مثال‌های مشــابه برای یک مســئله حاکی از این است که نوعی توجیه برای شگردهای ریاضی بابلی‌ها وجود داشته است؛

● مســئله‌ها طوری انتخاب می‌شدند که جواب‌های آن‌ها فقط عددهای گویای مثبت باشند. به‌علاوه در مورد معادله‌های درجهٔ دو تنها یکی از ریشه‌ها به‌عنوان جواب اعلام می‌شد، زیرا تا جایی که ما می‌دانیم، صفر، عددهای منفی و عددهای گنگ جزئی از دســتگاه عددهای بابلی‌ها نبودند؛

● مسئله‌ها غالباً به زبان هندسی بیان می‌شدند، ولی مسئله‌های هندســی نبودند. این مسئله‌ها کاربرد عملی هم نداشتند و احتمالاً در طرح آن‌ها هدف‌های آموزشــی وجود داشتند. مثلاً به این مورد در مسئلهٔ بالا دقت کنید که مساحت را به $\frac{2}{3}$ ضلع مربع می‌افزاید.

برای مطالعهٔ جنبه‌هایی از جبر بابلی‌ها، منابع شمارهٔ ۲، ۶، ۱۴ و ۱۸ را مطالعه کنید.

ریاضی‌دانان چینی (حدود ۲۰۰ ق. م.) و هندی (حدود ۶۰۰ ق. م.) پا را از ریاضی‌دانان بابلی فراتر گذاشتند (تاریخ‌هایی که ذکر کردیم، بســیار تقریبی‌اند). برای مثال، آن‌ها ضریب‌های منفی در معادله‌ها را مجاز می‌شــمردند (ولی ریشه‌های منفی را نه) و وجود دو ریشــه برای معادلهٔ درجــهٔ دو را می‌پذیرفتند. همچنین آن‌ها شــگردهایی را برای دســت‌ورزی با معادلات بیــان کرده‌اند، ولی هیچ نمادگذاری یا توجیهی برای جواب‌هایشان نداشتند. چینی‌ها روش‌هایی برای تقریب زدن ریشه‌های معادله‌های چندجمله‌ای از هر درجه‌ای داشته‌اند و دستگاه‌های معادلات خطی را با استفاده از «ماتریس‌ها» (آرایهٔ مستطیلی از عددها) حل کرده‌اند؛ خیلی پیش‌تر از آنکه چنین فنونی در اروپای غربی شناخته شوند. (به منابع شمارهٔ ۷، ۱۰ و ۱۸ رجوع کنید.)

۲. یونانیان

ریاضیات یونانی باستان به‌ویژه در هندسه و نظریهٔ عددها نسبتاً پیشرفته و ماهرانه بود، ولی جبر آن‌ها ضعیف بود. در اثر عظیم **اقلیدس**، «اصول» (حدود ۳۰۰ ق. م.)، بخش‌هایی وجود دارد که تاریخ‌دانان (به منابع شمارهٔ ۱۴ و ۱۶ مراجعه کنید)، به استثنای چند مورد مهم، آن‌ها را دارای ماهیت جبری می‌دانند. این چند مورد گزاره‌هایی هندســی هســتند که اگر به زبان جبری بیان شوند، نتایجی جبری همچون قانون‌های جبر و همچنین راه‌حل‌های معادله‌های درجهٔ دو را به‌دست می‌دهند. این کار به «جبر هندسی» شهرت داشت.

ریاضیات یونانیان باستان به‌ویژه در هندسه و نظریهٔ عددها نسبتاً پیشرفته و ماهرانه بود، ولی جبر آن‌ها ضعیف بود. در اثر عظیم اقلیدس، «اصول» (حدود ۳۰۰ ق.م.)، بخش‌هایی وجود دارد که تاریخ‌دانان، به استثنای چند مورد مهم، آن‌ها را دارای ماهیت جبری می‌دانند

برای مثال، گــزارهٔ II. ۴ در کتاب اصول بیان می‌کند: «اگر خطی راست به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مربع واقع بر کل خط با مربع‌های واقع بر هر یک از قطعه‌ها و دو برابر مستطیل حاصل از این قطعه‌ها مســاوی اســت.» اگر a و b آن دو قطعهٔ خط راست را نشان دهند، این گزاره را می‌توان به‌صورت جبری $(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$ بیان کرد. گزارهٔ II. ۱۱ بیان می‌کند: «مطلوب است تقسیم یک خط راســت به دو قطعه طوری که مستطیل حاصل از کل خط و یکی از قطعه‌ها، با مربع واقع بر قطعهٔ دیگر مساوی باشد.» به زبان جبری، مطلوب این گزاره حل معادلهٔ $a(a-x)=x^{2}$ است. (صفحهٔ ۷۰ منبع شمارهٔ ۷ را ببینید.)

چنان‌که در ایــن نمونه‌ها دیدیم، در جبر یونانی صحبت از کمیت‌ها می‌شود نه عددها. به‌علاوه شرط همگن بودن عبارت‌های جبری، یعنی هم‌درجه بودن همهٔ جمله‌های آن عبارت، شرطی دشوار است. مثلاً بنابر این شرط، معادله‌هایی مانند $x^{2}+x=b^{2}$ پذیرفتنی تلقی نمی‌شــدند. برای مطالعه در این باره، به منابع شمارهٔ ۱، ۲، ۱۸ و ۱۹ رجوع کنید.

یکی دیگر از آثار یونانیان در زمینهٔ جبر که بسیار مهم‌تر است، کتاب «اریثمتیکا»[2] **دیوفانتوس** (حدود ۲۵۰ ب. م.) است. هر چند این اثر اساساً کتابی دربارهٔ نظریهٔ عددهاست، راه‌حل برخی معادله‌ها در مجموعهٔ عددهای صحیح و گویا را نیز در خود دارد. اما چیزی که اهمیت بیشتری برای پیشرفت جبر دارد، این است که در این کتاب یــک نمادگذاری جبری به‌طور جزئی معرفی شده است که دستاوردی بسیار مهم به‌شمار می‌آید: ζ مجهول را نشان می‌دهد، Φ منفی را، $\acute{\iota}\sigma$ تساوی را، Δ^{σ} مربع مجهول را، K^{σ} مکعب آن را و M نبود مجهول را (چیزی که ما آن را به‌صورت x^{0} می‌نویسیم). مثلاً معادلهٔ $x^{3}-2x^{2}+10x-1=5$ به‌صورت $K^{\sigma}\alpha\zeta\acute{\iota}\Phi\Delta^{\sigma}\beta M\alpha\acute{\iota}\sigma M\varepsilon$ نوشته می‌شد. (عددها را با حروف نشان می‌دادند. بنابراین برای مثال، α به‌جای ۱ و ε به‌جای ۵ نوشــته می‌شــد. به‌علاوه علامتی برای جمع وجود نداشــت و لذا همهٔ جمله‌های با ضرایب مثبت، اول نوشــته می‌شدند و بعد از آن جمله‌های با ضریب‌های منفی را می‌آوردند.)

دیوفانتوس پیشرفت‌های قابل توجه دیگری هم داشته است:

● دو قاعدهٔ بنیادی برای کار با عبارت‌های جبری عرضه کرد: انتقال یک جمله از یک طرف معادله به طرف دیگر و حذف جمله‌های همانند از دو طرف معادله.

● او توان‌های منفی کمیت مجهول را تعریف و قانون‌نماها، یعنی $x^m x^n = x^{m+n}$ را به ازای $-6 \le m, n, m+n \le 6$ صریحاً بیان کرد.

● چندین قاعده برای انجام عملیات روی ضریب‌های منفی بیان کرد، مثل «کاستی ضربدر کاستی، نتیجه می‌دهد فراوانی» ($(-a)(-b) = ab$).

او برخی از چیزهایی را که پیامد سنت کلاسیک یونان بود، از میان برداشت؛ مثل تعبیر هندسی عبارت‌های جبری، محدود کردن درجهٔ حاصل‌ضرب جمله‌ها به حداکثر سه و الزام به همگن بودن جمله‌ها در عبارت‌های جبری (منابع شمارهٔ ۱، ۷ و ۱۸ را بنگرید).

۳. خوارزمی

بین قرن‌های نهم تا پانزدهم پس از میلاد (قرون سوم تا نهم هجری)، ریاضی‌دانان اسلامی به دستاوردهایی مهم در حوزهٔ جبر نائل آمدند. شاید برجسته‌ترین آن‌ها **محمدبن موسی خوارزمی** (حدود ۸۵۰- ۷۸۰ م.) باشد که برخی او را «اقلیدس جبر» لقب داده‌اند. او این علم را سازمان‌دهی کرد و هستی بخشید و آن را به‌صورت یک شاخهٔ علمی مجزا درآورد. او این کار را در کتابش با عنوان «الجبر و المقابله» به انجام رساند. «الجبر» (که کلمهٔ algebra از آن گرفته شده است) به معنای منتقل کردن جملهٔ منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و مثبت کردن آن است و «المقابله» اشاره به حذف جمله‌های مثبت برابر در دو طرف یک معادله دارد. مسلم است که این دو کار، شگردهای اساسی در حل معادله‌های چندجمله‌ای هستند.

خوارزمی (که اصطلاح «الگوریتم» از نام او مشتق شده است) این شگردها را برای حل معادله‌های درجهٔ دو به‌کار برده است. او این معادله‌ها را به پنج نوع دسته‌بندی کرد: $ax^2 = bx$، $ax^2 = b$، $ax^2 + bx = c$، $ax^2 + c = bx$ و $ax^2 = bx + c$.

این دسته‌بندی به این دلیل لازم بود که خوارزمی ضریب‌های منفی یا صفر را پذیرفتنی نمی‌دانست. همچنین او اساساً هیچ‌گونه نمادگذاری در اختیار نداشت و لذا مسائل و راه‌حل‌ها را به صورت کلامی بیان می‌کرد. مثلاً دستهٔ معادله‌های اول و سوم بالا را به‌صورت «مال‌هایی که با جذرها برابر می‌شوند» و «مال‌ها و جذرهایی که با عددی برابر می‌شوند» بیان کرده است (او مجهول را «جذر» نامیده است). خوارزمی برای راه‌حل‌های خود توجیهی هرچند هندسی می‌آورد. (به منابع ۱۳ و ۱۷ مراجعه شود.)

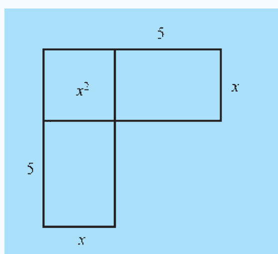
در اینجا نمونه‌ای از مسئله‌ها و راه‌حل‌های او را می‌آوریم [Katz, 1998]: «مالی را بیابید که اگر به ده جذر از خودش افزوده شود، مجموع ۳۹ شود.» (به‌عبارت دیگر، معادلهٔ $x^2 + 10x = 39$ را حل کنید.)

محمدبن موسی خوارزمی
(حدود ۸۵۰- ۷۸۰ م.)

بین قرن‌های نهم تا پانزدهم پس از میلاد، ریاضی‌دانان اسلامی به دستاوردهایی مهم در حوزهٔ جبر نائل آمدند. شاید برجسته‌ترین آن‌ها محمدبن موسی خوارزمی (حدود ۸۵۰ـ ۷۸۰م.) باشد که برخی او را «اقلیدس جبر» لقب داده‌اند

حل: «باید جذرها [ضریب x] را نصف کنی که این مقدار نصف، در این مسئله پنج می‌شود و آن نصف را در مانند خودش ضرب کنی. در این صورت حاصل‌ضرب ۲۵ می‌شود. آن‌گاه این عدد را بر ۳۹ بیفزایی، مجموع ۶۴ می‌شود. سپس جذر این عدد را می‌گیری؛ هشت می‌شود. نیمی از شمارهٔ جذرها را که عبارت باشد از پنج، از آن کم می‌کنی که در نتیجه سه باقی می‌ماند و همین عدد سه، جذر مال مورد نظر است و آن مال نُه است.» (این دستور با استفاده از نمادهای کنونی عبارت است از: $x = \sqrt{[(1/2)\times 10]^2 + 39} - (1/2)\times 10$).

توجیه هندسی خوارزمی برای این روش به این صورت



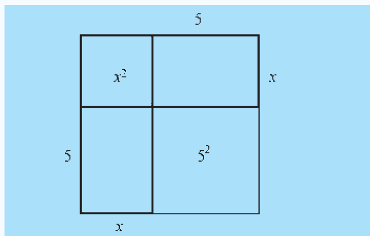
شکل ۱

است: عَلَمی مانند شکل ۱ بساز و با افزودنِ مربعی به ضلع ۵ آن را «کامل» کن تا مربع شکل ۲ به‌دست آید. مربع حاصل دارای طول ضلع $x + 5$ است. اما طول ضلع آن برابر ۸ نیز هست، زیرا: $x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 25 = 64$. بنابراین $x = 3$.

اکنون چندکلمه‌ای هم دربارهٔ برخی آثار ریاضی‌دانان اروپای غربی دربارهٔ جبر در قرن‌های پانزدهم و شانزدهم بگوییم. این ریاضی‌دانان که به آن‌ها «اَبِسیست»[۳] (حسابدار، مشتق از «اَبَکس»[۴] به معنی چرتکه) و یا «کوسیست»[۵] (مشتق از «کوسا»[۶] که در لاتین به معنای شیء است و برای کمیت مجهول از آن استفاده می‌کردند) گفته می‌شد، نمادگذاری‌های قبلی و قواعد حاکم بر انجام اعمال را گسترش دادند و به‌طور کلی آن‌ها را بهتر کردند. یکی از تأثیرگذارترین این نوع آثار، کتاب «مجموعه»[۷] نوشتهٔ **لوکا پاچولی**[۸]

به سال ۱۴۹۴ بود که جزء نخستین کتاب‌های چاپی در زمینهٔ ریاضی نیز هست (ماشین چاپ در حدود سال ۱۴۴۵ اختراع شد). برای مثال، او از «co»[۹] به جای مجهول استفاده می‌کند، نمادهایی برای ۲۹(!) توان اول آن وضع می‌کند، «p»[۱۰] را به جای جمع و «m»[۱۱] را به جای منها به‌کار می‌برد. برخی دیگر هم «R_X»[۱۲] را به جای ریشهٔ دوم و $R_{X,3}$ را به جای ریشهٔ سوم به‌کار برده‌اند. در سال ۱۵۵۷، **رابرت رکورد**[۱۳] نماد «=» را برای نشان دادن برابری معرفی کرد با این توجیه که «هیچ دو چیز نمی‌توانند خیلی برابر باشند.[۱۴]» (به منابع شمارهٔ ۷، ۱۳ و ۱۷ رجوع کنید.)

بابلی‌ها در حدود سال ۱۶۰۰ ق. م. معادلهٔ درجه دو را با استفاده از دستورهایی اساساً معادل با فرمول درجهٔ دوم حل می‌کردند. بنابراین طبیعی است که بپرسیم: «آیا معادله‌های درجهٔ سه را می‌توان با استفاده از فرمول‌هایی مشابه حل کرد؟»



شکل ۲

۴. معادله‌های درجهٔ سه و درجهٔ چهار

بابلی‌ها در حدود سال ۱۶۰۰ ق. م. معادلهٔ درجه دو را با استفاده از دستورهایی اساساً معادل با فرمول درجهٔ دوم حل می‌کردند. بنابراین طبیعی است که بپرسیم: «آیا معادله‌های درجهٔ سه را می‌توان با استفاده از فرمول‌هایی مشابه حل کرد؟» سه هزار سال دیگر باید سپری می‌شد تا جواب معلوم شود.

این اتفاق شگرفی در جبر بود که ریاضی‌دانان قرن شانزدهم «با استفاده از رادیکال‌ها» به حل نه‌تنها معادله‌های درجهٔ سه، بلکه معادله‌های درجه چهار نائل آمدند.

حل معادلهٔ چندجمله‌ای برحسب رادیکال‌ها، عبارت است از ارائهٔ فرمولی که ریشه‌های معادله را برحسب ضریب‌های آن به‌دست بدهد. تنها اعمالی که روی ضریب‌ها مجاز شمرده می‌شود، چهار عمل جبری (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) و گرفتن ریشه‌ها (ریشهٔ دوم، ریشهٔ سوم و ...، یعنی رادیکال‌ها) است. مثلاً فرمول درجهٔ دوم $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$، حل معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ برحسب رادیکال‌هاست.

نخستین بار **کاردانو**[۱۵] در کتابش با عنوان «فن کبیر[۱۶]» (که اشاره به جبر دارد) به سال ۱۵۴۵ حل معادلهٔ درجه سه را برحسب رادیکال‌ها منتشر کرد؛ گرچه **دل فرّو**[۱۷] و **تارتالیا**[۱۸] قبلاً آن را کشف کرده بودند. تارتالیا روش خود را با کاردانو در میان گذاشته بود و کاردانو عهد کرده بود که آن را منتشر نخواهد کرد، ولی منتشر کرد. فرمول مشهور به فرمول کاردانو برای حل معادلهٔ درجه سهٔ $x^3 = ax + b$ به این صورت بوده است:

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}}$$

در اینجا تذکر چند نکته بجاست:

● کاردانو هیچ نمادی به‌کار نبرده است و بنابراین «فرمول» او به‌صورت کلامی بیان شده است (و تقریباً در نیمی از یک صفحه جا گرفته است). علاوه بر این، معادله‌هایی که او حل کرده است، همگی ضریب‌های عددی دارند.

● معمولاً به یافتن تنها یک ریشه از معادلهٔ درجه سه اکتفا کرده است. اما حقیقت این است که اگر ریشه‌های سوم درست انتخاب شوند، هر سه ریشهٔ معادلهٔ درجه سه را می‌توان با فرمول کاردانو معلوم کرد.


جیرولامو کاردانو
(۱۵۷۶–۱۵۰۱ م.)

● در آثار او گهگاه عددهای منفی دیده می‌شوند، لیکن او به دیدهٔ شک به آن‌ها نگاه می‌کرد و آن‌ها را «مجعول» می‌خواند. ضریب‌ها و ریشه‌های معادلهٔ درجه سهٔ مورد بررسی کاردانو، عددهای مثبت بودند (عددهای گنگ را نیز مجاز می‌شمرد). بنابراین مثلاً دو معادلهٔ $x^3 = ax + b$ و $x^3 + ax = b$ را باید متمایز از هم در نظر گرفت و به هر کدام، یک فصل اختصاص داد. (با دسته‌بندی خوارزمی برای معادله‌های درجهٔ دو مقایسه کنید).

● کاردانو برای روش حل معادله‌های درجهٔ سه توجیهی هندسی می‌آورد.

طولی نکشید که معادله‌های چندجمله‌ای درجهٔ چهار نیز بر حسب رادیکال‌ها حل شدند. ایدهٔ اصلی این بود که حل معادلهٔ درجهٔ چهار را به حل معادلهٔ درجه سه تحویل کنند. **فِرّاری**[۱۹] اولین ریاضی‌دانی بود که این‌گونه معادله‌ها را حل کرد. نتایج او

قرن‌ها دیدگاه ریاضی‌دانان دربارهٔ ریشه‌های دوم عددهای منفی این بود که چون مربع هر عدد مثبت و نیز مربع هر عدد منفی، عددی مثبت است، پس ریشهٔ دوم عددهای منفی وجود ندارد و درواقع نمی‌تواند وجود داشته باشد. اما پس از آنکه در قرن شانزدهم میلادی، معادلات درجهٔ سه به کمک رادیکال‌ها حل شدند، همه چیز دگرگون شد

در کتاب فن کبیر کاردانو آمده است. (برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، به منابع شمارهٔ ۱، ۷، ۱۰ و ۱۲ رجوع کنید.)

باید خاطرنشان کنیم که روش‌های یافتن ریشه‌های تقریبی معادله‌های درجهٔ سه و درجهٔ چهار، خیلی قبل‌تر از حل این معادله‌ها برحسب رادیکال‌ها شناخته شده بودند. این جواب‌های معادله‌ها گرچه دقیق هستند، ارزش کاربردی کمی دارند. با این حال، پیامدهای این ایده‌های «غیرقابل استفادهٔ» ریاضی‌دانان دورهٔ رنسانس ایتالیا بسیار بااهمیت بود.

۵. معادله‌های درجهٔ سه و عددهای مختلط

قرن‌ها دیدگاه ریاضی‌دانان دربارهٔ ریشه‌های دوم عددهای منفی این بود که چون مربع هر عدد مثبت و نیز مربع هر عدد منفی، عددی مثبت است، پس ریشهٔ دوم عددهای منفی وجود ندارد و درواقع نمی‌تواند وجود داشته باشد. اما پس از آنکه در قرن شانزدهم میلادی، معادلات درجهٔ سه به کمک رادیکال‌ها حل شدند، همه چیز دگرگون شد.

وقتی فرمول کاردانو را برای حل معادلات درجه سه به‌کار می‌بریم، ریشه‌های دوم عددهای منفی «به‌طور طبیعی» ظاهر می‌شوند. برای مثال، اگر این فرمول را برای حل معادلهٔ درجهٔ سهٔ $x^3 = 9x + 2$ به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم:

$$x = \sqrt[3]{2/2 + \sqrt{(2/2)^2 - (9/3)^3}} + \sqrt[3]{2/2 - \sqrt{(2/2)^2 - (9/3)^3}} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-26}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-26}}$$

خب! تکلیف ما با این جواب چیست؟ چون کاردانو به عددهای منفی بدگمان بود، یقیناً درکی از ریشهٔ دوم آن‌ها نیز نداشت و لذا این فرمول را برای معادله‌هایی مانند $x^3 = 9x + 2$ غیرقابل استفاده می‌دانست. اگر بخواهیم بر مبنای تجربیات گذشته قضاوت کنیم، این طرز تفکر چندان هم نامعقول نبود، کما اینکه از نظر فیثاغورسیان پاره‌خطی وجود نداشت که اندازهٔ آن برابر با طول ضلع مربعی به مساحت ۲ باشد (به زبان امروزی، مثل این است که بگوییم معادلهٔ $x^2 = 2$ حل‌پذیر نیست).

رافائل بومبلّی[20] همهٔ این دیدگاه‌ها را عوض کرد. او در کتاب مهمش به نام «جبر» به سال ۱۵۷۲، فرمول کاردانو را برای حل معادلهٔ $x^3 = 15x + 4$ به‌کار برد و جواب را به شرح زیر به‌دست آورد:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

اما نمی‌توانست این جواب را کنار بگذارد، زیرا با وارسی متوجه شده بود که $x = 4$ جوابی از این معادله است و دو ریشهٔ دیگر این معادله که آن‌ها هم عددهای حقیقی هستند، عبارت‌اند از: $-2 \pm \sqrt{3}$. از این رو دچار سرگشتگی شد؛ در حالی که هر سه ریشهٔ معادلهٔ $x^3 = 15x + 4$ حقیقی بودند، نتیجه‌ای که از به‌کار بردن فرمول کاردانو به‌دست می‌آمد، مشتمل بر ریشه‌های دوم عددهای منفی بود که این پدیده در آن زمان بی‌معنی بود. اما چگونه می‌شد از این سرگشتگی بیرون آمد؟

بومبلی قوانین مربوط به محاسبه با کمیت‌های حقیقی را در مورد عبارت‌هایی «بی‌معنا» به شکل $a + \sqrt{-b}\ (b > 0)$ به‌کار بست و توانست نشان دهد که:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

در نتیجه:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

به این ترتیب بومبلی به چیزی اندیشید که «اندیشیدنی» نبود و آن اینکه با ریشه‌های دوم عددهای منفی می‌توان به روشی بامعنا کار کرد و نتایجی مهم به‌دست آورد. پس او به یک کار «بی‌معنا»، معنا بخشیده بود. این پیشرفتی برجسته در مجموعهٔ کارهای بومبلی بود. خودش در این باره می‌گوید:

«به باور بسیاری، این یک اندیشهٔ افسارگسیخته بود و خودم نیز مدتی طولانی همین عقیده را داشتم. به نظر می‌رسید کل ماجرا یک جور سفسطه باشد تا حقیقت. با این حال آنقدر به جست‌وجو ادامه دادم تا ثابت کردم که نه! این حقیقت است» [Nahin, 1998].

بومبلی یک «حساب» برای عددهای مختلط ارائه کرد که با قاعده‌هایی همچون قاعده‌های زیر آغاز می‌شد:

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \quad \text{و} \quad (\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = 1$$

و جمع و ضرب برخی عددهای مختلط خاص را تعریف کرد. این، زمان تولد عددهای مختلط بود؛ تولدی که مانده بود تا رسمیت یابد. طی دو سده پس از آن، ماهیت عددهای مختلط پوشیده از رمز و راز بود، درک درستی از آن‌ها وجود نداشت و این اعداد غالباً نادیده گرفته می‌شدند. درواقع پس از آنکه **گاوس** به سال ۱۸۳۱ برای عددهای مختلط نمایشی هندسی به‌سان نقاطی در صفحه ارائه کرد، این موجودات به‌عنوان عضوهای واقعی دستگاه عددها پذیرش

تا اوایل قرن نوزدهم، یعنی حدود سه هزار سال، «جبر» عبارت بود از فن حل کردن معادله‌های چندجمله‌ای عمدتاً با درجهٔ حداکثر چهار. موضوع‌هایی از قبیل نمادگذاری این‌گونه معادلات، نوع ریشه‌های آن‌ها و قوانین حاکم بر دستگاه‌های عددی گوناگونی که ریشه‌ها عضو آن‌ها بودند، در این چارچوب مورد بررسی قرار می‌گرفتند. همهٔ این موضوع‌ها را روی هم با عنوان «جبر کلاسیک» می‌شناختند

یافتند (کارهای نخستین **آرگان**[21] و **وسل**[22] در این باره در میان ریاضی‌دانان شناخته‌شده نبود). برای مطالعهٔ بیشتر رجوع کنید به: منابع شمارهٔ ۱، ۷ و ۱۳.

توجه کنید که معادلهٔ $x^3 = 15x + 4$ نمونه‌ای از معادلات درجهٔ سهٔ تحویل‌ناپذیر است، یعنی معادلاتی با ضریب‌های گویا که روی میدان عددهای گویا تحویل‌ناپذیر هستند و همهٔ ریشه‌های آن‌ها حقیقی‌اند. در قرن نوزدهم ثابت شد که همه جواب این‌گونه معادلات درجهٔ سه (نه‌تنها معادلهٔ کاردانو) که با رادیکال‌ها بیان شود، مشتمل بر عددهای مختلط است. بنابراین اگر بخواهیم معادلات درجهٔ سهٔ تحویل‌ناپذیر را با رادیکال‌ها حل کنیم، عددهای مختلط اجتناب‌ناپذیر هستند. به همین دلیل است که این عددها در ارتباط با حل معادلات درجه سه ظاهر می‌شوند، نه چنان که به غلط تصور می‌شود، در زمینهٔ حل معادلات درجهٔ دو (اینکه معادلهٔ درجهٔ دو $x^2 + 1 = 0$ جواب ندارد، قرن‌ها بود که پذیرش عام یافته بود).

ادامهٔ مطلب را در شمارهٔ آیندهٔ مجله مطالعه بفرمایید.

پی‌نوشت‌ها

۱. این مقاله ترجمه فصل اول از کتاب زیر است:

Kleiner, Israel. *A History of Abstract Algebra*. Birkhäuser, 2007.

2. Arithmetica
3. abacists
4. abacus
5. cosists
6. cosa
7. Summa
8. Luca Pacioli
9. cosa
10. piu
11. meno
12. radix
13. Robert Recorde
14. noe 2 thynges can be moare equalle
15. Gerolamo Cardano
16. The Great Art
17. Scipione del Ferro
18. Niccolò Tartaglia
19. Lodovico Ferrari
20. Rafael Bombelli
21. Jean-Robert Argand
22. Caspar Wessel

منابع

1.Bashmakova,I.G.,Smirnova,G.S., The Beginnings and Evolution of Algebra,Translated from the Russian by A. Shenitzer, The Mathematical Association of America, 2000.

2.Bashmakova, I.G., Smirnova, G.S.,Geometry: The first universal language of mathematics, in: Grosholz, E., Breger, H. (eds.), The Growth of Mathematical Knowledge, Kluwer Academic Press, 2000.

3. Bourbaki, N.,Elements of the History of Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidel-berg, 1994.

4. Dobbs, D. E., Hanks, R.,A Modern Course on the Theory of Equations, Polygonal Pub-lishing House, Washington, New Jersey, 1980.

5. Fine, B., Rosenberg, G.,The Fundamental Theorem of Algebra, Springer-Verlag, NewYork, 1987.

6. Hoyrup, J.,Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Babylonian Algebra and its Kin,Springer-Verlag, New York, 2002.

7. Katz, V.,A History of Mathematics, 2nd. edn., Addison-Wesley, New York, 1998.

8. Katz, V., Algebra and its teaching: An historical survey,Journal of Mathematical Behav-ior,16(1997).

9.Kleiner,I.,Thinking the unthinkable: The story of complex numbers (with a moral), Mathematics Teacher, 81(1988).

10.Kline,M.,Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press,Oxford, 1972.

11. Nahin, P. G.,An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$ Princeton University Press, 1998.

12. Parshall, K. H., The art of algebra from al-Khwarizmi to Viète: A study in the naturalselection of ideas, History of Science,26 (1988).

13. Pycior, H. M., George Peacock and the British origins of symbolical algebra, Historia Mathematica,8 (1981).

14. Robson, E., Influence, ignorance, or indifference? Rethinking the relationship between Babylonian and Greek mathematics, Bulletin of the British Society for the History of Mathematics, 4 (2005).

15. Turnbull, H. W.,Theory of Equations, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1957.

16. Unguru, S., On the need to rewrite the history of Greek mathematics, Archive for the History of Exact Sciences,15 (1975–76).

17. Van der Waerden, B. L., A History of Algebra, from al-Khwarizmi to Emmy Noether,Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, 1985.

18. van der Waerden, B. L.,Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

19. van der Waerden, B. L., Defence of a “shocking” point of view,Archive for the History of Exact Sciences,15 (1975–76).